Rozšíření MA1

Domácí úkol 1b. - lineární algebra 2 (lineární zobrazení, vlastní čísla a vlastní vektory matice) .

---

1. Rozhodněte (a odůvodněte), zda jsou následující zobrazení lineární:

a) $K: R^2 \to R^3$, $K(x_1, x_2) = (2x_1 + x_2,\ x_1 - x_2,\ 3x_1 - 2x_2)$;

b) $P: R^3 \to R^3$, $P(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 - x_3, 3x_1 + 2x_2 - 1,\ x_1 - x_2)$;

c) $S: R^3 \to R^4$, $S\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

2. Buď A $= \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ matice lineárního zobrazení $L: R_3 \to R_3$.

i) Najděte $L((1,-1,2))$.

ii) Určete vektor (x_1, x_2, x_3) tak, aby $L((x_1, x_2, x_3)) = (1, 2, 5)$.

3. Nechť L je lineární zobrazení, $L: R^3 \to R^3$, pro které platí:

$$L\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},\ L\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix},\ L\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

a) Najděte $L\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ pro libovolný vektor $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in R^3$ a matici tohoto zobrazení.

b) Ukažte, že k zobrazení L z části a) existuje inverzní zobrazení a toto inverzní zobrazeni najděte. Můžete zde užít inverzní matici k matici zobrazení L?

4. („dobrovolně“)

Je dána matice $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Označme L lineární zobrazení R_5 do R_3, jehož maticí je matice A.

(i) Je zobrazení L zobrazení R_5 na R_3 ?

(ii) Je zobrazení L prosté?

(iii) Najděte všechny vektory z R_5, jejich obrazem je nulový vektor.
Ukažte, že tyto vektory tvoří podprostor R_5 dimenze 2.

5. Je dána matice $$M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Vysvětlete, co znamená, že $\lambda \in C$ je vlastní číslo matice M a $\vec{v}$ je vlastní vektor, příslušný tomuto vlastnímu číslu λ.
b) Ukažte, že číslo $\lambda = -1$ je vlastní číslo matice M.
c) Najděte všechny vlastní vektory, příslušné vlastnímu číslu $\lambda = -1$.
Ověřte správnost výpočtu.

6. („dobrovolně")

Je dána matice $$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Ukažte, že $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -2$ jsou vlastní čísla matice A.
b) Najděte vlastní vektory, příslušné těmto vlastním číslům.
c) Sestavíte-li čtvercovou matici V , jejíž sloupce jsou vlastní vektory z části b), příslušné po řadě tomuto vlastním číslům $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, ukažte, že platí

$$V^{-1} \cdot A \cdot V = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$